



Меньшакова Татьяна Вячеславовна

*магистрант, факультет математики и информационных технологий,
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования «Национальный исследовательский Мордовский
государственный университет им. Н. П. Огарёва»
menshakova_94@mail.ru*

Сыромясов Алексей Олегович

*кандидат физико-математических наук, доцент, кафедра прикладной
математики, дифференциальных уравнений и теоретической механики,
факультет математики и информационных технологий, Федеральное
государственное бюджетное образовательное учреждение высшего
образования «Национальный исследовательский Мордовский государственный
университет им. Н. П. Огарёва»
syal1@yandex.ru*

УДК 519.633:51-74

**О ЧИСЛЕННОМ МОДЕЛИРОВАНИИ ТЕПЛОПЕРЕДАЧИ ОТ
СКВАЖИНЫ К ПЛАСТУ ПОРОДЫ В ПАКЕТЕ ANSYS**

В статье рассматривается простейшая задача о передаче тепла от скважины к окружающему ее пласту породы. Полученное ранее аналитическое решение задачи применяется для построения области, в которой далее проводятся вычисления с использованием пакета ANSYS Workbench. Оценивается суммарная погрешность и скорость сходимости численного метода.

Ключевые слова: уравнение теплопроводности, скважина, численный метод решения, пакет ANSYS Workbench, погрешность, порядок сходимости.

1. Постановка и аналитическое решение задачи

Имеется пласт нефтесодержащей породы, в центре которого пробурена цилиндрическая скважина (рис. 1).



ISSN: 2500-4212. Свидетельство о регистрации СМИ: ЭЛ № ФС 77 - 67083 от 15.09.2016

Научное обозрение. Раздел II. Наука и практика. 2018. №2. ID 106

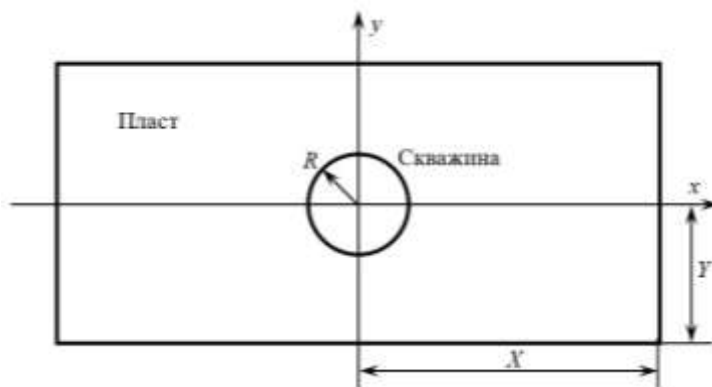


Рис. 1. Схематичное изображение пласта нефтесодержащей породы, имеющего скважину

В нее под давлением закачивается вода, температура которой постоянна. Поскольку она не равна начальной температуре пласта, между скважиной и пластом возникает тепловой поток. Требуется найти распределение температуры в пласте [1].

Рассмотрим задачу в простейшей безразмерной постановке: будем считать, что тепло распространяется лишь вдоль оси Ox^* . Тогда пласт задается неравенством $x^* > 0$, а граница скважины – равенством $x^* = 0$. Описанная геометрия показана на рис. 2. Обозначим безразмерную температуру через T^* , время – через t^* .

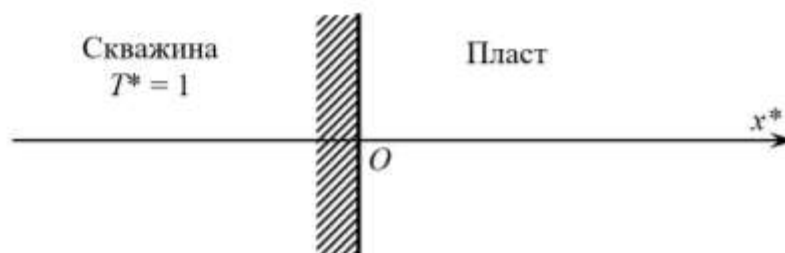


Рис. 2. Схематичное изображение упрощенной постановки задачи

Распределение температуры в пласте породы описывается уравнением теплопроводности

$$\frac{\partial T^*}{\partial t^*} = \frac{\partial^2 T^*}{\partial x^{*2}}, \quad x^* \geq 0,$$



которое имеет начальное условие:

$$T^*|_{t^*=0} = 1, x^* \geq 0,$$

и граничное условие взаимодействия скважины и пласта породы, которое описывается законом Ньютона – Рихмана:

$$\frac{\partial T^*}{\partial r^*} = Bi \cdot T^*, x^* = 0.$$

Здесь безразмерный параметр Bi есть число Био, вычисляемое по формуле:

$$Bi = \beta R / \lambda,$$

где β – коэффициент теплоотдачи,

R – радиус скважины,

λ – коэффициент теплопроводности в пласте.

К этим уравнениям необходимо присоединить условие затухания по времени на бесконечности:

$$T^*(t^*, r^*) \rightarrow 0, t^* \rightarrow \infty.$$

В результате мы имеем систему:

$$\begin{cases} \frac{\partial T^*}{\partial t^*} = \frac{\partial^2 T^*}{\partial x^{*2}}, x^* \geq 0, \\ T^*|_{t^*=0} = 1, x^* \geq 0, \\ \frac{\partial T^*}{\partial r^*} = Bi \cdot T^*, x^* = 0, \\ T^* \rightarrow 0 \text{ при } t^* \rightarrow \infty \end{cases} \quad (1)$$

Для решения задачи были взяты следующие конкретные данные: $\lambda = 2,5208$ Вт/(м·К), $\beta = 20 \dots 100$ Вт/(м²·К), $R = 0,05$ м. Далее нам также понадобятся плотность жидкости в пласте $\rho = 950$ кг/м³ и объемная теплоемкость пласта $\alpha = 1316676$ Дж/(м³·К).



Решение системы (1), полученное интегральным преобразованием Лапласа по времени, имеет вид [5]:

$$T^*(t^*, x^*) = 1 - \operatorname{erfc} \frac{x^*}{2\sqrt{t^*}} + e^{\operatorname{Bi} \cdot x^*} e^{\operatorname{Bi}^2 t^*} \operatorname{erfc} \left(\operatorname{Bi} \cdot \sqrt{t^*} + \frac{x^*}{2\sqrt{t^*}} \right), \quad (2)$$

где используется дополнительная функция ошибок [2]:

$$\operatorname{erfc} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^\infty e^{-u^2} du.$$

Это решение можно использовать для контроля точности численных методов, применяемых при расчете распределения температуры.

2. Численное решение задачи в пакете ANSYS

Для численного решения задачи (1) используем систему ANSYS Workbench, в которой выберем тип расчета *Transient Thermal*.

Нами была создана геометрия задачи: мы нарисовали прямоугольник размерами $x^* = 75$ м, $y^* = 1$ м и описали вещество с ранее указанными плотностью, теплопроводностью и удельной теплоёмкостью $c_\alpha = \alpha/\rho$. Вещество с этими характеристиками было приписано созданной геометрии.

На внешней границе было задано граничное условие типа *Temperature*: $T^* = 1$, внутри пласта было задано начальное условие $T^* = 1$. На левой границе пласта, т.е. на границе со скважиной, мы задали условие типа *Convection*. В качестве его параметра было взято число Био, принимающее значения от 0,396699 до 1,9835 при выбранных нами β, R, λ . В самой скважине температура всегда равна нулю.

Для более точного решения было произведено сгущение сетки у границы скважины и пласта с помощью инструмента *Inflation* (рис. 3).



ISSN: 2500-4212. Свидетельство о регистрации СМИ: ЭЛ № ФС 77 - 67083 от 15.09.2016

Научное обозрение. Раздел II. Наука и практика. 2018. №2. ID 106

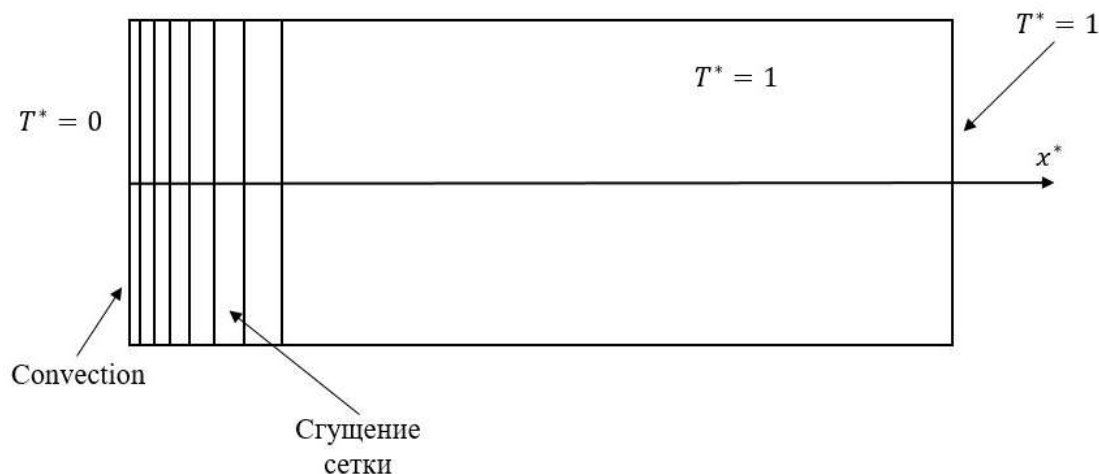


Рис. 3. Схематичное изображение геометрии задачи в пакете ANSYS

Посоветовавшись с коллегами из Уфы, мы выяснили, что размерное время t , в течение которого нас интересует расчет, составляет 10 дней. Исходя из этого, мы взяли безразмерное время $t^* = \lambda t / (\alpha R^2)$, изменяющееся от 0 до 650.

Как только мы упростили задачу, заменив бесконечную область на конечную, наше решение приобрело неустранимую погрешность, связанную с неточностью исходных данных, принятых для численного расчета. Как показывает подстановка выбранных нами значений x^* и t^* в (2), эта погрешность должна составлять не более 3–4%. Такая погрешность вполне допустима для практических целей.

Как видно из рис. 4, с течением времени распределение температуры меняется, начиная с левого края области.



ISSN: 2500-4212. Свидетельство о регистрации СМИ: ЭЛ № ФС 77 - 67083 от 15.09.2016

Научное обозрение. Раздел II. Наука и практика. 2018. №2. ID 106

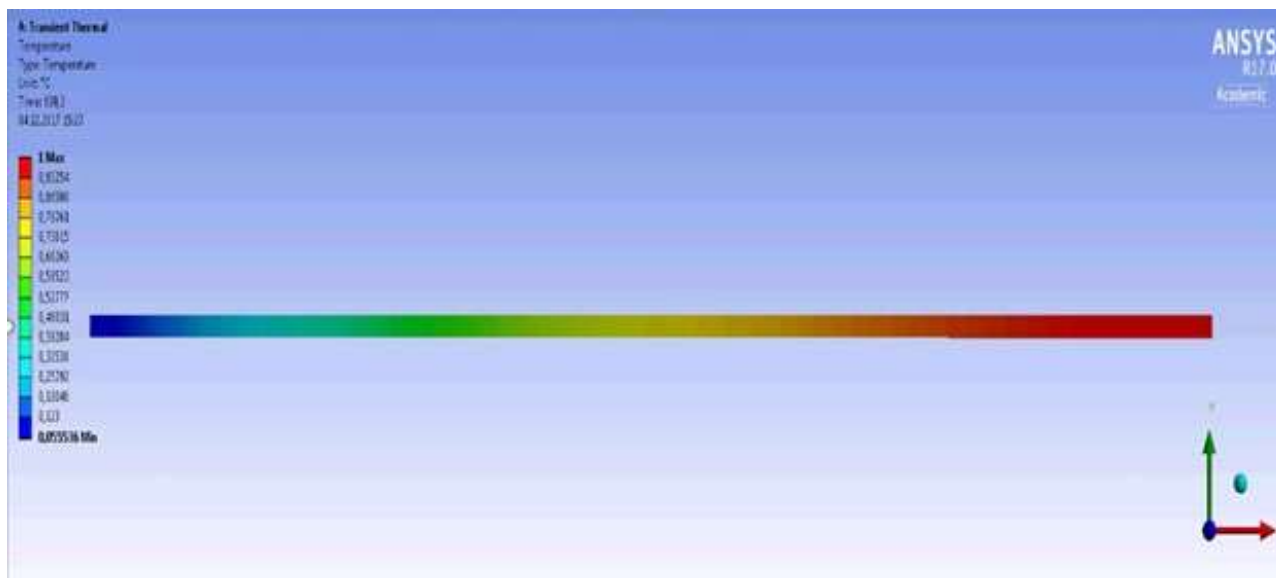


Рис. 4. Распределение температуры в конце расчета

Для получения таблицы значений температуры с шагом по времени $t^* = 50$ по координате $x^* = 7,5$ м мы выводили результаты вдоль контура с помощью инструмента *Path* пакета ANSYS.

3. Сравнение аналитического и численного решений

Будем сравнивать результаты нашего численного решения с полученным ранее аналитическим решением (2). Нами рассмотрены три случая численной реализации задачи: шаг вычислений по координате составлял $\Delta x^* = 1$; $\Delta x^* = 0,5$; $\Delta x^* = 0,25$. Используем число Фурье, характеризующее соотношение между скоростью изменения тепловых условий в окружающей среде и скоростью перестройки поля температуры внутри рассматриваемой системы; оно зависит от размеров тела (или шага вычислений) и коэффициента его температуропроводности. В нашем случае, когда уравнения обезразмерены, число Фурье **Fo** вычисляется по формуле

$$\mathbf{Fo} = \frac{\Delta t^*}{(\Delta x^*)^2},$$

и называется также параболическим числом Куранта [3].

Изменяя Δx^* , мы должны изменять и Δt^* так, чтобы величина **Fo** оставалась постоянной. Отсюда $\Delta t^* = \mathbf{Fo} \cdot (\Delta x^*)^2$, и при **Fo** = 5 для наших Δx^*



ISSN: 2500-4212. Свидетельство о регистрации СМИ: ЭЛ № ФС 77 - 67083 от 15.09.2016

Научное обозрение. Раздел II. Наука и практика. 2018. №2. ID 106

шаг по времени Δt^* составляет соответственно 5; 1,25; 0,3125. Такое значение числа Фурье соответствует документации пакета ANSYS.

В каждом из случаев абсолютная погрешность в точке вычисляется как модуль разности температур, полученных при численном и аналитическом решениях. Ниже представлен фрагмент таблицы (табл. 1) при $\Delta x^* = 1$, показывающий, что абсолютная погрешность не превышает 0,03–0,04; это соответствует относительной погрешности в 3–4%, о которой было сказано ранее.

Таблица 1. Значение абсолютной погрешности в точке, вычисляющееся как модуль разности температур, полученных при численном и аналитическом решениях

		50	100	150	200
	Length	Value [°C]			
1	0	0,006032	0,002363	0,001335	0,000861
2	7,5	0,011032	0,006504	0,004171	0,002938
3	15	0,000151	0,004012	0,003849	0,003235
4	22,5	0,003016	0,00013	0,001511	0,001992
5	30	0,001278	0,001679	0,000491	0,000395

Далее оценим, насколько сильно наши решения *в целом* отличаются друг от друга. Для этого необходимо выбрать метрику (расстояние) в функциональном пространстве, которому принадлежат решения. Нами было проверено два вида метрик.

Пусть имеются функции f и g , заданные в области D . Тогда метрика может вычисляться одним из следующих способов [4]:

$$\rho(f, g) = \max_{x \in D} |f(x) - g(x)|; \quad (3)$$

$$\rho(f, g) = \int_D |f(x) - g(x)| dx. \quad (4)$$



В нашем случае область D задается парами (t^*, x^*) , вместо f и g будут взяты аналитическое и численное решения задачи (1).

Использовать (3) нам не удалось. Аналитическое решение (2) вычисляется точно и при $x^* \rightarrow \infty$ меняется очень слабо, а при численном решении задачи условия на правой границе области заданы заранее и не изменяются с течением времени. Вместе данные обстоятельства приводят к тому, что максимум разности температур, полученных при численном и аналитическом решениях, не изменяется. Поэтому полученные с помощью (3) значения метрики не характеризуют точность решения в целом.

Применить (4) напрямую тоже не получается, потому что численное решение задачи известно только в некоторых точках области D . Поэтому заменим в (4) интеграл на сумму и в качестве суммарной погрешности ΔT_{total} будем рассматривать выражение

$$\Delta T_{total} = \sum_{i,l} \Delta_{i,j} \Delta t^* \Delta x^* \approx \iint_D \Delta dt^* dx^*, \quad (5)$$

где Δ и $\Delta_{i,j}$ – модуль разности между аналитическим и численным решениями в произвольной точке (t^*, x^*) и в точке (t_i^*, x_j^*) , соответственно.

Указанная суммарная погрешность складывается из погрешности математической модели, неустранимой погрешности, погрешности вычислительного метода и погрешности округления. Известно, что погрешность вычислительного метода должна быть в 2–5 раз меньше неустранимой погрешности [6].

Нами найдено, что при $\Delta x^* = 1$ величина (5) равна 0,1322549; при $\Delta x^* = 0,5$ она составляет 0,0335669, а при $\Delta x^* = 0,25$ она равна 0,0088048.

Эти данные позволяют оценить порядок сходимости численного решения. Говорят, что порядок сходимости равен n , если при шаге вычислений h

$$\Delta T_{total}(h) = Ch^n.$$

Тогда при шаге вычислений $h/2$

$$\Delta T_{total}\left(\frac{h}{2}\right) = C \frac{h^n}{2^n},$$



откуда

$$n = \log_2 \frac{\Delta T_{total}(h)}{\Delta T_{total}\left(\frac{h}{2}\right)}.$$

В качестве h будем рассматривать Δx^* . Сравнивая суммарные погрешности при $h = 1$ и $h = 0,5$, получим $n \approx 1,98$; аналогично, при $h = 0,5$ и $h = 0,25$ получим $n \approx 1,93$. Среднее значение $n \approx 1,95$ слабо отличается от обеих найденных величин, т.е. примененная схема вычислений устойчива.

Таким образом, скорость сходимости численного метода получается достаточно хорошей, что говорит о правильно заданных граничных и начальных условиях и корректности сделанных упрощений.

Список использованных источников

1. Бобренева Ю. О., Губайдуллин И. М., Жалнин Р. В., Масягин В. Ф. Моделирование температурных полей в вертикальной скважине с техногенной трещиной с использованием адаптивных сеток // Параллельные вычислительные технологии (ПаВТ'2016): труды междунар. науч. конф. (Архангельск, 28 марта – 01 апреля 2016 г.). Архангельск, 2016. С. 454–462.
2. Лыков А. В. Теория теплопроводности. М.: Высш. шк., 1967. 600 с.
3. Аристова Е. Н., Лобанов А. И. Практические занятия по вычислительной математике в МФТИ: учеб. пособие. Ч. II. М.: МФТИ, 2015. 310 с.
4. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1976. 544 с.
5. Сыромясов А. О., Меньшакова Т. В. Об аналитических методах моделирования теплопередачи в системе “скважина + пласт” // Дифференциальные уравнения и их приложения в математическом моделировании: материалы XIII Междунар. науч. конф. (Саранск, 12–16 июля 2017 г.). Саранск: СВМО, 2017. С. 322–329.
6. Кафедра физики твердого тела Петрозаводского государственного университета [Электронный ресурс]: сайт. – URL: http://dssp.petrso.ru/p/tutorial/meth_calc/files/02.shtml (дата обращения: 18.03.2018.).



Menshakova Tatyana

MSc Student, Faculty of Mathematics and Information Technologies, Federal State Budgetary Educational Institution of Higher Education «National Research Ogarev Mordovia State University»

Syromyasov Aleksey

PhD in Phys. and Math., Associate Professor, Department of Applied Mathematics, Differential Equations and Theoretical Mechanics, Faculty of Mathematics and Information Technologies, Federal State Budgetary Educational Institution of Higher Education «National Research Ogarev Mordovia State University»

ABOUT NUMERICAL MODELING OF HEAT TRANSFER FROM WELL TO ROCK BED IN ANSYS PACKAGE

The paper considers the simplest problem of heat transfer from a well to the surrounding rock bed. An analytical solution of the problem was obtained earlier. It is used to construct the computational domain. Calculations in this domain are held in the ANSYS Workbench package. The total error and the convergence rate of the numerical method are estimated.

Keywords: heat equation, well, numerical solution method, ANSYS Workbench package, convergence rate.

© АНО СНОЛД «Партнёр», 2018

© Меньшакова Т. В., 2018

© Сыромясов А. О., 2018

Учредитель и издатель журнала:

Автономная некоммерческая организация содействие научно-образовательной и литературной деятельности «Партнёр»
ОГРН 1161300050130 ИНН/КПП 1328012707/132801001

Адрес редакции:

430027, Республика Мордовия, г. Саранск, ул. Ульянова, д.22 Д, пом. 1
тел./факс: (8342) 32-47-56; тел. общ.: +79271931888;
E-mail: redactor@anopartner.ru





ISSN: 2500-4212. Свидетельство о регистрации СМИ: ЭЛ № ФС 77 - 67083 от 15.09.2016

Научное обозрение. Раздел II. Наука и практика. 2018. №2. ID 106

О журнале

- ✓ Журнал имеет государственную регистрацию СМИ и ему присвоен международный стандартный серийный номер ISSN.
- ✓ Материалы журнала включаются в библиографическую базу данных научных публикаций российских учёных Российский индекс научного цитирования (РИНЦ).
- ✓ Журнал является официальным изданием. Ссылки на него учитываются так же, как и на печатный труд.
- ✓ Редакция осуществляет рецензирование всех поступающих материалов, соответствующих тематике издания, с целью их экспертной оценки.
- ✓ Журнал выходит на компакт-дисках. Обязательный экземпляр каждого выпуска проходит регистрацию в Научно-техническом центре «Информрегистр».
- ✓ Журнал находится в свободном доступе в сети Интернет по адресу: **www.srjournal.ru**. Пользователи могут бесплатно читать, загружать, копировать, распространять, использовать в образовательном процессе все статьи.

Прием заявок на публикацию статей и текстов статей, оплата статей осуществляется через функционал Личного кабинета сайта издательства "Партнёр" (www.anopartner.ru) и не требует посещения офиса.